ಪ್ರೌಢಶಾಲೆಯ ಹಿರಿಯ ತರಗತಿಗಳಿಗಾಗಿ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಸಂಪಾದಕರು:
ಪೃಥ್ವಿಜಿತ್ ಡೇ ಮತ್ತು ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ

ಸಮಸ್ಯೆ VI-1-S.1
$ABCD$ ಒಂದು ಚಕ್ರೀಯ ಚತುರ್ಭುಜ ಮತ್ತು ಅದರ ಕರ್ಣಗಳಾದ AC ಮತ್ತು BD ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಕರ್ಣಗಳೆರಡೂ ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವು X ಆಗಿರಲಿ. P ಬಿಂದುವು BC ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಈಗ AD ಗೆ PX ಲಂಬವಾಗಿದೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಸಮಸ್ಯೆ VI-1-S.2
a, b, c ಗಳು ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಮೂರು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. a, b, c ಗಳು ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು b, c, a ಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ c, a, b ಗಳು ಸಮನ್ವಯ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ಮತ್ತು $a : b : c$ ಅನುಪಾತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಮಸ್ಯೆ VI-1-S.3
ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಮೊತ್ತವು ಪೂರ್ಣಾಂಕವಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ :

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \cdots \frac{2016}{2017}$$

ಸಮಸ್ಯೆ VI-1-S.4
ಆರು ಸತತ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಪರಿಪೂರ್ಣ ಘನ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸಿರಿ.

ಸಮಸ್ಯೆ VI-1-S.5
a ಅಳತೆಯ ಭುಜಗಳುಳ್ಳ ಚೌಕವು ವೃತ್ತವೊಂದರಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿದೆ. ಹಾಗೆ ಲಭ್ಯವಾದ ಖಂಡವೊಂದರಲ್ಲಿ ಅಡಕವಾಗಿರುವ ಚೌಕದ ಭುಜದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಸಂಚಿಕೆ V-3ರಲ್ಲಿ (ನವೆಂಬರ್ 2016) ಪ್ರಕಟವಾದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರಗಳು

ಸಮಸ್ಯೆ V-3-S.1 ಗೆ ಪರಿಹಾರ
$ABCD$ ಒಂದು ಪೀನ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರಲಿ. P, Q, R, S ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB, BC, CD, DA ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. $PQRS$ ಯಾವ ವಿಧವಾದ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗುತ್ತದೆ? $PQRS$ ಚೌಕವಾಗಿದ್ದರೆ, $ABCD$ಯ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಲಂಬಕೋನದಲ್ಲಿವೆ ಎಂದು ಪ್ರಮಾಣೀಕರಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಮಧ್ಯಬಿಂದು ಪ್ರಮೇಯದ ಆಧಾರದ ಮೇರೆಗೆ PQ ಮತ್ತು RS ಭುಜಗಳು AC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು $PQ = RS = AC/2$. ಆದ್ದರಿಂದ $PQRS$ ಒಂದು

ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. $PQRS$ ಚೌಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $PQ \perp QR$. ಆದರೆ PQ ಭುಜವು AC ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು QR ಭುಜವು BD ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $AC \perp BD$.

ಸಮಸ್ಯೆ V-3-S.2 ಗೆ ಪರಿಹಾರ
$ABCD$ ಒಂದು ಪೀನ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿರಲಿ. P, Q, R, S ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AB, BC, CD, DA ಭುಜಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. U ಮತ್ತು V ಕ್ರಮವಾಗಿ AC ಮತ್ತು BD ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿರಲಿ. PR, QS ಮತ್ತು UV ರೇಖೆಗಳು ಸಹವರ್ತಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: $PQRS$ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. PR ಮತ್ತು QS ಗಳು X ನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. PR ಮತ್ತು QS ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದು X ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ತ್ರಿಕೋನ ADB ಯಲ್ಲಿ S ಮತ್ತು V ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AD ಮತ್ತು BD ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ SV ಯು AB ಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $SV = AB/2$. $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ U ಮತ್ತು Q ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ AC ಮತ್ತು BC ಗಳ ಮಧ್ಯಬಿಂದುಗಳಾಗಿವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ UQ ವು ABಗೆ ಸಮಾಂತರವಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $UQ = AB/2$. ಆದ್ದರಿಂದ ಚತುರ್ಭುಜ $QUSV$ ಯಲ್ಲಿ ಒಂದು ಜೊತೆ ವಿರುದ್ಧ ಬಾಹುಗಳಾದ SV ಮತ್ತು UQ ಪರಸ್ಪರ ಸಮಾಂತರವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಸಮವಾಗಿವೆ. ತತ್ಕಾರಣ $QUSV$ ಒಂದು ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜವಾಗಿದೆ. ಸಮಾಂತರ ಚತುರ್ಭುಜದ ಕರ್ಣಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಛೇದಿಸುವುದರಿಂದ X ಬಿಂದುವು UV ಯ ಮೇಲೆಯೇ ಇರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ PR, QS ಮತ್ತು UV ರೇಖೆಗಳು ಸಹವರ್ತಿಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಸಮಸ್ಯೆ V-3-S.3 ಗೆ ಪರಿಹಾರ
ಇಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟಾರೆ 12 ದೀಪಗಳಿವೆ, ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲವನ್ನೂ ಆರಿಸಲಾಗಿವೆ. ಪ್ರತಿ ದೀಪಕ್ಕೂ ಒಂದು ಸ್ವಿಚ್ ಇದೆ. ದೀಪದ ಸ್ವಿಚ್ಚನ್ನು ಒತ್ತಿದಾಗ ಅದರ ಸ್ಥಿತಿಯು ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವಾಗುತ್ತದೆ; ಎಂದರೆ, ದೀಪ ಆನ್ ಆಗಿದ್ದರೆ ಸ್ವಿಚ್ ಆಫ್ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇದರ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತವೂ ಸ್ಥಾಪಿತವಾಗುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ಸುತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಒಬ್ಬರು 5 ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಒತ್ತಬಹುದು. ಎಲ್ಲ ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಆನ್ ಮಾಡಲು ಕನಿಷ್ಠ ಎಷ್ಟು ಸುತ್ತುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ? (ಹಾಂಗ್ ಕಾಂಗ್ ಪೂರ್ವಭಾವಿ ಆಯ್ಕೆ ಸ್ಪರ್ಧೆ 2015).

ಪರಿಹಾರ: n ಸುತ್ತುಗಳ ನಂತರ ಎಲ್ಲ ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳು ಆನ್ ಆಗಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ನಾವು ಒಟ್ಟಾರೆ $5n$ ಬಾರಿ ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಆನ್ ಮಾಡಿರುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿ ದೀಪವೂ ತನ್ನ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಷ್ಟು ಬಾರಿ ಬದಲಾಯಿಸಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ ಒಟ್ಟಾರೆ 12 ದೀಪಗಳು ಇರುವುದರಿಂದ ದೀಪಗಳು ಸ್ಥಿತಿ ಬದಲಿಸಿದ ಒಟ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ n ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿರುವ ಅಂಶವೆಂದರೆ $n \neq 2$, ಏಕೆಂದರೆ ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ $5 \times 2 = 10$ ದೀಪಗಳನ್ನು 2 ಸುತ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ಬೆಳಗಿಸಬಹುದು. ಆದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ನಾಲ್ಕು ಸುತ್ತುಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಎಲ್ಲ ದೀಪಗಳನ್ನು ಬೆಳಗಿಸಬಹುದು.

ಸುತ್ತು 1: 1, 2, 3, 4, 5 ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಒತ್ತಿ

ಸುತ್ತು 2: 6, 7, 8, 9, 10 ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಒತ್ತಿ.

ಸುತ್ತು 3: 7, 8, 9, 10, 11 ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಒತ್ತಿ.

ಸುತ್ತು 4: 7, 8, 9, 10, 12 ಸ್ವಿಚ್ಚುಗಳನ್ನು ಒತ್ತಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಉತ್ತರವು 4 ಎಂಬುದು ಸಾಬೀತಾಗುತ್ತದೆ.

ಸಮಸ್ಯೆ V-3-S.4 ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರ
ಅಸಮ ತ್ರಿಕೋನದ ಒಂದು ಭುಜವು 5 ಘಟಕ, ಮತ್ತೊಂದು ಭುಜವು 2 ಘಟಕಗಳದ್ದಾಗಿದ್ದರೆ ಮೂರನೆಯ ಭುಜದ ಅಳತೆಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕದ ಮೌಲ್ಯದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ABC ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. $BC = a, CA = b, AB = c$ ಆಗಿರಲಿ. ತ್ರಿಕೋನವು ಅಸಮಭುಜ ತ್ರಿಕೋನವಾದುದರಿಂದ $a < b < c$ ಎಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. h_a, h_b, h_c ಗಳು BC, CA, AB ಗಳ ಎತ್ತರದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುವುದಾದರೆ, ಆಗ $h_a > h_b > h_c$ ಮತ್ತು $ah_a = bh_b = ch_c = 2\Delta$; ಇಲ್ಲಿ Δ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಸೂಚಿಸುತ್ತದೆ. ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ದತ್ತ ಅಂಶಗಳ ಪ್ರಕಾರ $h_a = 5$. $a + b > c$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} > \frac{1}{h_c}$$

ಆಗಿಯೇ ಇರುತ್ತದೆ.

$h_b = 2$ ಆಗಿದ್ದರೆ, h_c ಯು ಪೂರ್ಣಾಂಕವೇ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ $h_c = 1$ ಆಗಿರಲು ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ. ಆದರೆ ಇದರಿಂದ $7/10 > 1$ ಎಂಬ ಅನರ್ಥ ಸಮೀಕರಣ ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ $h_c = 2$. $h_b > h_c = 2$ ಎಂಬುದು ವಾಸ್ತವ ಅಂಶವಾದುದರಿಂದ ನಮಗೆ $2 < h_b < 10/3$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $h_b = 3$.

ಸಮಸ್ಯೆ V-3-S.5 ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರ

ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾದ $\overline{ABC}$ 27ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಲ್ಲದ್ದಾಗಿದ್ದರೆ, ಮೂರು ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ $\overline{BCA}$ ಮತ್ತು $\overline{CAB}$ ಸಹ 27ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಲ್ಲಂತಹವು ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: $\overline{ABC}$ ಯು 9 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಲ್ಲದ್ದಾದ್ದರಿಂದ ಒಂಬತ್ತು $A + B + C$ಯನ್ನೂ ಭಾಗಿಸುತ್ತದೆ. m ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವಾಗಿದ್ದು $A + B + C = 9m$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$\begin{aligned}\overline{BCA} - \overline{ABC} &= (100B + 10C + A) - (100A + 10B + C)\\ &= 90B + 9C - 99A\\ &= 9(A + B + C) - 108A + 81B\\ &= 27(-4A + 3B + 3m),\end{aligned}$$

ಹಾಗೂ

$$\begin{aligned}\overline{CAB} - \overline{ABC} &= (100C + 10A + B) - (100A + 10B + C)\\ &= 99C - 90A - 9B\\ &= -81A + 108C - 9(A + B + C)\\ &= -81A + 108C - 81m\\ &= 27(-3A + 4C - 3m).\end{aligned}$$

ಆದ್ದರಿಂದ $\overline{BCA}$ ಮತ್ತು $\overline{CAB}$ ಸಹ 27ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಲ್ಲಂತಹವು.

ಅನುವಾದ : ಎನ್. ರಾಮನಾಥ್